ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
«БРАТСКИЙ ПРОМЫШЛЕННЫЙ ТЕХНИКУМ»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

ПО ДИСЦИПЛИНЕ
МАТЕМАТИКА

по специальности

23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (в строительстве)

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОЙ ФОРМЫ ОБУЧЕНИЯ

Братск, 2017

Составитель: Петухова Е.Г., преподаватель ГБПОУ ИО БПромТ

Учебно-методический комплекс по дисциплине *математика* составлен в соответствии с требованиями к результатам освоения дисциплины, изложенными в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего профессионального образования по специальности *23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (в строительстве)*, утвержденном приказом Министерства образования и науки РФ от «22» апреля 2014 г. № 386.

Учебно-методический комплекс по дисциплине (далее УМКД) *математика* является частью основной профессиональной образовательной программы ГБПОУ ИО БПромТ по специальности *23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (в строительстве)*

Учебно-методический комплекс по дисциплине *математика* адресован студентам заочной формы обучения.

УМКД включает теоретический блок, примеры практических занятий, вопросы для самоконтроля, задания по выполнению домашней контрольной работы, а также вопросы и задания по промежуточной аттестации.

Рецензент: Фамилия И.О., преподаватель, Братский промышленный техникум

Настоящая разработка рассмотрена цикловой комиссией *информационно-гуманитарных дисциплин*

Протокол № _1__ от «_28_» сентября 2017г.

Председатель ЦК *Орлова Н.А.*

СОДЕРЖАНИЕ

УВАЖАЕМЫЙ СТУДЕНТ!

Учебно-методический комплекс по дисциплине *математика* создан Вам в помощь при выполнении самостоятельной работы и подготовке к итоговому контролю по дисциплине.

УМК по дисциплине включает теоретический блок, примеры практических занятий, вопросы для самоконтроля, задания контрольной работы.

Приступая к изучению учебной дисциплины, Вы должны внимательно изучить список рекомендованной основной и вспомогательной литературы. Из всего массива рекомендованной литературы следует опираться на литературу, указанную как основную.

По каждой теме в УМК перечислены основные понятия и термины, вопросы, необходимые для изучения (план изучения темы), а также краткая информация по каждому вопросу из подлежащих изучению.

Основные понятия, используемые при изучении содержания дисциплины, приведены в глоссарии.

В процессе изучения дисциплины большая часть часов отводится на самостоятельную внеаудиторную работу, которая является основной частью усвоения дисциплины и выполняется в межсессионный период, включающая, *домашнюю контрольную работу*.

Освоение дисциплины требует обязательного выполнения одной контрольной работы.

По итогам изучения дисциплины проводится экзамен.

Экзамен по билетам вопросы к которому приведены в конце УМКД.

В результате освоения дисциплины Вы должны уметь:

- применять математические методы дифференциального и интегрального исчисления для решения профессиональных задач;
- применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;
- решать прикладные технические задачи методом комплексных чисел;
- использовать приемы и методы математического синтеза и анализа в различных профессиональных ситуациях.

В результате освоения дисциплины Вы должны знать:

- основные понятия и методы математическо-логического синтеза и анализа логических устройств.

В результате освоения дисциплины у Вас должны формироваться общие компетенции (ОК):

Название ОК	Результат, на который Вы должны ориентироваться в процессе освоения дисциплины
ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии,	описывать значимость своей специальности

проявлять к ней устойчивый интерес.	
ОК 2. Организовывать собственную деятельность, исходя из цели и способов ее достижения, определенных руководителем.	Рациональная последовательность выполнения своих действий при выполнении практических заданий
ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность	Результативность решения профессиональных проблем. Оперативность решения нестандартных задач. Анализ профессиональ-ной ситуации с позиции возможностей и ожидаемых рисков.
ОК 4. Осуществлять поиск информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач.	Оперативность поиска необходимой информации с использованием различных средств. Обоснованность выбора и оптимальность состава источников информации для решения профессиональных задач и самообразо-вания.
ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности	Эффективность использования прикладного программного обеспечения, информационных ресурсов и возможностей сети Интернет в профессиональной деятельности.
ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, клиентами.	Результативность общения с коллегами, руководством, социальными партнерами. Успешность применения па практике коммуникативных качеств личности в процессе общения с сокурсниками, педагогами, сотрудниками, руководством, работодателем. Соблюдение принципов профессиональной этики
ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения задания	Соблюдение принципов целеполагания. Оптимальность решения организационных задач. Использование методов стимулирования деятельности членов профессионального коллектива. Оценивание уровня ответственности за результат деятельности профессионального коллектива.
ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознано планировать повышение квалификации	Самоорганизация по освоению профессиональных компетенций во внеучебное время. Самостоятельное освоение дополнительных профессиональных компетенций. Участие в общественной деятельности, способствующей личностному развитию. Участие в профессиональных конкурсах и конференциях.
ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности	Изучение и анализ инноваций в области разработки технологических процессов профессиональной деятельности. Результативность использования инновационных технологий в профессиональной деятельности.

Содержание дисциплины поможет Вам подготовиться к последующему освоению специальности.

Внимание! Если в ходе изучения дисциплины у Вас возникают трудности, то Вы всегда можете прийти к преподавателю на консультации, которые проводятся согласно графику.

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ МАРШРУТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Таблица 1

Формы отчетности, обязательные для сдачи	**Количество**
лабораторные занятия	-
практические занятия	8
Точки рубежного контроля (домашняя контрольная работа)	1
Итоговая аттестация (при наличии)	экзамен

Желаем Вам удачи!

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Раздел 1. Элементы математического анализа

Тема 1.1 Последовательности и пределы функции

Функция *f(x)* называется функцией *целочисленного аргумента,* если множество значений x, для которых она определена, является множеством всех натуральных чисел 1, 2, 3,… Примером функции целочисленного аргумента может служить сумма n первых чисел натурального ряда. В данном случае $f(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \dots$ (1.1) следующих одно за другим в определенном порядке и построенных по определенному закону, с помощью которого a_nзадается как функция целочисленного аргумента n т.е. $f(n) = a$.

Число A называется пределом последовательности (1.1)*, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует число* $N = N(\varepsilon)$*, такое, что при* $n > N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $|a_n - A| < \varepsilon$. Если число A есть предел последовательности (1), то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$

Числовая последовательность не может иметь более одного предела. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.*

Пусть дана функция: $y = f(x)$

Определение: Постоянное число *A* называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всех x, сколь угодно мало отличающихся от *a,* т. е. ($|x - a| < \delta$) значение функции *y* сколь угодно мало отличается от числа *A,* т.е. ($|y - A| < \varepsilon$) т. е. если при *x > a* выполняется условие $y \to A$, то $\lim\limits_{n\to a} f(x) = A$.

Теоремы о пределах

1. $\lim(x \pm y) = \lim x \pm \lim y$

Предел суммы или разности равен сумме или разности пределов.

2. $\lim(x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$

Предел произведения равен произведению пределов.

3. $\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$

Предел отношения равен отношению пределов.

Основные свойства пределов

1. Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых

$$\lim(x + y + \cdots + t) = \lim x + \lim y + \cdots + \lim t$$

2. Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:

$$\lim(x \cdot y \cdot \ldots \cdot t) = \lim x \cdot \lim y \cdot \ldots \cdot \lim t$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim(cx) = \lim c \cdot \lim x = c\lim x$$

4. Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:

$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$, если $\lim y \neq 0$

5. Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной

$$\lim x^n = (lim x)^n$$

Понятие бесконечно малой и бесконечно большой величины

Если предел функции равен нулю ($lim y = 0$), то она называется **бесконечно малой величиной.**

Если предел функции равен бесконечности ($lim y = \infty$), т.е. величине, обратной к бесконечно малой величине, то она называется **бесконечно большой величиной**.

Следовательно, выполняются равенства: $lim\frac{1}{0} = \infty$; $lim\frac{1}{\infty} = 0$

Но при подставлении чисел могут получиться неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ В этих случаях используются специальные методы. Рассмотрим эти методы.

Раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$

1.Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо предварительно дробь сократить (разложив на множители), а затем найти предел. (Примеры 4,5,6)

2.При встрече иррациональности в знаменателе (в числителе), и числитель и знаменатель умножаются на выражение, сопряженное знаменателю (числителю), а затем знаменатель (числитель) раскрывается по формуле разности квадратов (Пример 7)

Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Для раскрытия неопределенности такого вида необходимо числитель и знаменатель разделить на x с наибольшим показателем степени (Примеры 8,9,10)

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

Предел отношения sin бесконечно малой величины к самой этой величине равен 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{x} = 1$$

Свойства

1. $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{bx} = \frac{a}{b}$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{tgax}{bx} = \frac{a}{b}$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{sinax}{sinbx} = \frac{a}{b}$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$$

Примеры решения типового варианта

Пример 1. Найти общий член последовательности 1,4,9,16,25, ...

Решение: нетрудно видеть, что $a_1 = 1 = 1^2$, $a_2 = 4 = 2^2$, $a_3 = 3 = 3^2$, $a_4 = 16 = 4^2$, $a_5 = 25 = 5^2$ и т.д.

Следовательно $a_n = n^2$.

Ответ: $a_n = n^2$.

Пример 2. Найти общий член последовательности $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \ldots$

Решение: не трудно видеть, что $|a_1| = |1| = 1 = \frac{1}{1}$,

$|a_2| = \left|-\frac{1}{3}\right| = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} = \frac{1}{2+1}$, $|a_3| = \left|\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} = \frac{1}{2\cdot 2+1}$, $|a_4| = \left|-\frac{1}{7}\right| = \frac{1}{7} = \frac{1}{2\cdot 3+1}$, и т.д.

Следовательно $|a_n| = \frac{1}{2(n-1)+1} = \frac{1}{2n-2+1} = \frac{1}{2n-1}$

Ответ: $|a_n| = \frac{1}{2n-1}$

Пример 3. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+5-\frac{1}{n^2})$

Решение: Разложим предел на сумму пределов и вычислим каждый из полученных пределов отдельно.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+5-\frac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n^2 + \lim\limits_{n\to\infty} 5 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = \infty + 5 - 0 = \infty$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^2+5-\frac{1}{n^2}\right) = \infty$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3}$

Решение: $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3} = \left(\frac{0}{0}\right)_{\text{н}} = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{(2x-3)(2x+3)}{2x+3} = \lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}(2x-3) = -3-3 = -6$, здесь использовалась для разложения формула: $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

Ответ: $\lim\limits_{x\to-\frac{3}{2}}\frac{4x^2-9}{2x+3} = -6$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x}$

Решение: Подставляя в предел вместо x=3 получаем $\frac{3^2-9}{3-3}$ получаем $\frac{0}{0}$, т. е. неопределенность в вида $\frac{0}{0}$. Нужно знаменатель и числитель преобразовать. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x+3)}{-(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3}(-(x+3)) = -6$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x} = -6$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$,

Решение: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = \left(\frac{0}{0}\right)_{\text{н}} = \lim\limits_{x\to 5}\frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x-4)} = \lim\limits_{x\to 5}\frac{x-2}{x-4} = \frac{3}{1} = 3$,

здесь необходимо было решить квадратные уравнения для разложения квадратного трехчлена на множители в числителе и в знаменателе дроби по формуле $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

a) $x^2-7x+10=0$

$D=b^2-4ac=49-40=9$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{7\pm 3}{2}$$

$x_1=5, x_2=2;$

b) $x^2-9x+20=0$

$D=b^2-4ac=81-80=1$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{9\pm 1}{2}$$

$x_1=5, x_2=4;$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20} = 3$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$,

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right)_{\text{н}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{(\sqrt{1+3x}-1)(\sqrt{1+3x}+1)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{1+3x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+3x}+1)}{3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x}+1)}{3} = \frac{2}{3}$

здесь, для того, чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, и числитель и знаменатель были умножены на выражение, сопряженное знаменателю, а затем знаменатель был свернут по формуле разности квадратов.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\frac{2}{3}$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)_{\text{н}}$ Преобразуем выражение $\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}$, поделив почленно числитель и знаменатель на x^2.

Тогда: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$

Теперь общий член последовательности можно считать полученным в результате суммирования, вычитания и деления общих членов последовательностей

$$\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=2\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{5}{2}$$

Итак, предел данной последовательности равен $\frac{5}{2}$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x+2}{2x^2-x+1}=\frac{5}{2}$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)_{\text{н}}$. Преобразуем выражение $\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$, поделив почленно числитель и знаменатель на x^4.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^4}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}=\infty$

Пример 10. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)_{\text{н}}$. Преобразуем выражение $\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$, поделив почленно числитель и знаменатель на x^6.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^6}+\frac{x^4}{x^6}}{\frac{x^5}{x^6}+\frac{x^6}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1}=\frac{0}{1}=0$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x^4}{x^5+x^6}=0.$

Пример 11. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{3x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{3x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{x}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sinx}{3x}=\frac{1}{3}$

Пример 12. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{x} = 5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x} = 5\cdot 1 = 5$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{x} = 5$

Пример 13. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{sin3x}{x}}{\frac{sin5x}{x}} = \frac{3\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{3x}}{5\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin5x}{5x}} = \frac{3}{5}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin3x}{sin5x} = \frac{3}{5}$

Пример 14. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}$

Решение: Используя второй замечательный предел получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6} = \left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right)^{6} = e^{6}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x} = e^{6}$

Пример 15. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}}$

Решение: Используя второй замечательный предел получим $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}} = \left(\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\right)^{\frac{3\cdot 4}{5}} = e^{\frac{12}{5}}$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{5x}} = e^{\frac{12}{5}}$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется последовательностью?
2. Сформулировать геометрический смысл предела последовательности.
3. Может ли последовательность иметь два предела?
4. В чем состоит достаточный признак сходимости последовательности?
5. Какие виды неопределенностей встречаются при вычислении пределов?
6. Какие пределы называются односторонними пределами функции в точке?
7. Какие функции называются бесконечно малыми, бесконечно большими функциями в точке, как они связаны между собой?
8. Какой вид неопределенности раскрывается с помощью а) первого замечательного предела; б) второго замечательного предела?
9. Вывести первый замечательный предел.
10. Сформулировать второй замечательный предел.

Тема 1.2. Дифференциальное исчисление. Интегральное исчисление

При изучении данной темы необходимо усвоить понятие функции и её свойства, которое важно при вычислении производной функции.

Понятие производной функции одно из важных понятий в математическом анализе. Для умения решать прикладные задачи с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений необходимо знать правила дифференцирования, таблицу дифференциалов и правило производной сложной функции.

Понятие первообразной функции - одно из важных понятий в математическом анализе. Для решения прикладных задач с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений необходимо знать понятие первообразной, определённого и неопределённого интегралов. Для применения данной темы нужно освоить свойства неопределённого и определённого интегралов, методы интегрирования и таблицу интегралов.

Изучение и усвоение данной темы способствует решению прикладных задач с использованием элементов дифференциального и интегрального исчислений, а также вычислять значения геометрических величин: площадей и объёмов.

Определение производной.

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения Δf функции в этой точке к приращению Δx аргумента, когда последнее стремиться к нулю: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Для производной функции $y = f(x)$ употребляются обозначения: $y', y'_x, \frac{dy}{dx}$ или $f', f'(x), \frac{df(x)}{dx}$.

Функция $f(x)$, имеющая производную в каждой точке некоторого промежутка, называется *дифференцируемой* в этом промежутке.

Производная сложной функции.

Теорема: Если функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t_0, а функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0 = \varphi(t_0)$, то сложная функция $f[\varphi(t)]$ имеет производную в точке t_0, определяемую по формуле $y'(t_0) = f'(x_0)\varphi'(t_0)$.

Частной производной *функцией нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке х называется обычная производная по этой переменной, если считать другие переменные фиксированными (постоянными).*

Главная часть приращение функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется *дифференциалом* функции и обозначается знаком d, т. е. $dy = y'\Delta x$.

Правила дифференцирования

I. $C' = 0$, C- постоянная

II. $(u + v)' = u' + v'$

III. $(Cu)' = Cu'$, C- постоянная

IV. $(uv)' = u'v + uv'$

V. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv\prime}{v^2}$

Формулы дифференцирования $(C)' = 0, C = const$

Основные элементарные функции	Сложные функции
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot lna$	$(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^x \cdot u'$
$(\log_a x)' = \dfrac{1}{xlna}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{ulna} \cdot u'$
$(lnx)' = \dfrac{1}{x}$	$(lnu)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
$(sinx)' = cosx$	$(sinu)' = cosu \cdot u'$
$(cosx)' = -sinx$	$(cosu)' = -sinu \cdot u'$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(tgx)' = \frac{1}{cos^2x}$$
$$(ctgx)' = -\frac{1}{sin^2x}$$
$$(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$
$$(tgu)' = \frac{1}{cos^2u} \cdot u'$$

$$(arccosx)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(ctgu)' = -\frac{1}{sin^2u} \cdot u'$$
$$(arcsinu)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$
$$(arccosu)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$
$$(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$
$$(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Общая схема для построения графиков функций

1. Найти область определения функции $D(y)$.
2. Найти точки пересечения графика функций с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность или нечетность.
4. Исследовать функцию на периодичность.
5. Найти промежутки монотонности и точки экстремума функции.
6. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции.
7. Найти асимптоты функции.
8. По результатам исследования построить график .

Пример: Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = x^3 - 3x.$$

Решение:

1) Функция определена на всей числовой оси, т. е. ее область определения $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2) Найдем точки пересечения с осями координат:

с осью ОХ : решим уравнение $x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0, \quad x = 0 \quad \text{или} \quad x = \pm\sqrt{3}$.

с осью OY: $y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

3) Выясним, не является ли функция четной или нечет
ной:

$y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$.

Отсюда следует, что функция является нечетной.

4) Функция непериодична.
5) Найдем промежутки монотонности и точки экстремума функции: $y' = 3x^2 - 3$.

Критические точки: $3x^2 - 3 = 0, \quad x^2 = 1, \quad x = \pm 1$.

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	↗	т. max 2	↘	т. min -2	↗

$y(0) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = 2$

$y(2) = 1^3 - 3 \cdot 1 = -2$

6) Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба функции: $y'' = 6x$

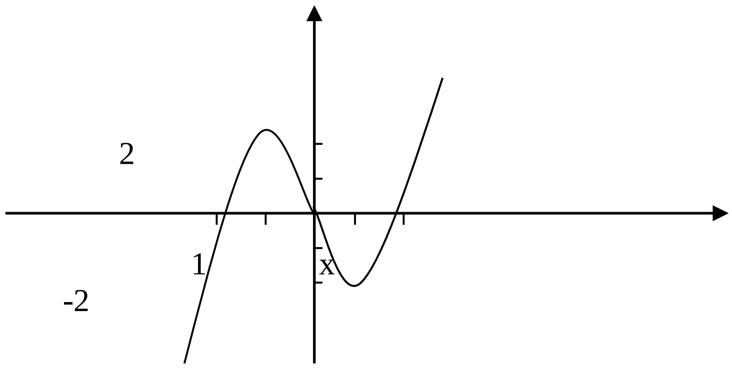
Критические точки: $6x = 0, \quad x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
y''	-	0	+
y	$\cap$	точка перегиба 0	$\cup$

$y(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 = 0$

7) Функция непрерывна, асимптот у нее нет.
8) По результатам исследования построим график функции:

у



Практика показывает, что часто приходится по заданной производной или по заданному дифференциалу функции находить функцию, от которой была взята производная и дифференциал, т.е. выполнять обратную задачу дифференцированию – интегрирование.

Функция *F(x)* называется **первообразной** для функции *f(x)* на интервале *(a;b)*, если в любой точке этого промежутка ее производная равна f(x), т.е. $F'(x)=f(x),\ x\in(a;b)$

Совокупность первообразных для функции f(x) или для дифференциала $f(x)dx$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x+C)$**,** где *f(x)* – подынтегральная функция, *f(x)dx* – подынтегральное выражение,
c – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. $(\int f(x)dx)' = f(x)$

2. Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла, т.е. $\int mf(x)dx = m\int f(x)dx$, где m=const

3. Интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов от этих функций, т.е. $\int(f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.

4. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т.е. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5. Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной *C,* т.е. $\int dF(x) = F(x) + c$ или $\int F'(x)dx = F(x) + c$.

Способ подстановки (замены переменной)

Если заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы, одним из которых является способ подстановки (замены переменной).

Заметим, что все способы интегрирования имеют целью свести данный интеграл к табличному с помощью тех или иных искусственных приемов.

Способ подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение). (Примеры 6,7)

Способ интегрирования по частям

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться способом интегрирования по частям.

Выведем формулу интегрирования по частям.

Интегрируя обе части равенства $d(\mathcal{U}\mathcal{V}) = \mathcal{U}d\mathcal{V} + \mathcal{V}d\mathcal{U}$, получим

$\int d(\mathcal{U}\mathcal{V}) = \int \mathcal{U}d\mathcal{V} + \int \mathcal{V}d\mathcal{U}$ или $\mathcal{U}\mathcal{V} = \int \mathcal{U}d\mathcal{V} + \int \mathcal{V}d\mathcal{U}$, откуда $\int \mathcal{U}d\mathcal{V} = \mathcal{U}\mathcal{V} - \int \mathcal{V}d\mathcal{U}$.

С помощью этой формулы нахождение интеграла $\int \mathcal{U}d\mathcal{V}$ сводится к нахождению интеграла $\int \mathcal{V}d\mathcal{U}$, который может оказаться или проще данного, или даже известным.

При практическом использовании формулы интегрирования по частям данное подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух сомножителей, которые обозначают $\mathcal{U}$ и $d\mathcal{V}$. Множитель $\mathcal{U}$ стараются выбрать так, чтобы $\mathcal{U}'$ было проще, чем $\mathcal{U}$. (Примеры 8,9,10)

Дифференциальными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестными являются функции одного или нескольких переменных, причем в уравнения входят явно производные искомых функций до некоторого порядка. Если неизвестными являются функции двух или более переменных, то уравнения называются *уравнениями в частных производных.* В противном случае, то есть если искомая функция зависит только от одного вещественного независимого переменного, уравнения называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями.*

Рассмотрим в первую очередь одно дифференциальное уравнение первого порядка. Общий вид такого уравнения следующий:

$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$ (1.2.)

Здесь t - независимое переменное, x - неизвестная функция, зависящая от t. $\frac{dx}{dt}$ - ее производная. F- заданная функция трех вещественных переменных. Функция F, вообще говоря, может быть задана не для всех значений своих аргументов, поэтому следует говорить об области W задания функции F, имея в виду область координатного пространства трех (вещественных) переменных t, x, $\dot{x}$.

Уравнение (1.2) называется *уравнением первого порядка* потому, что в него входит лишь производная первого порядка от неизвестной функции x.

Пример 1. Найти производную функции: $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$

Решение: Воспользуемся IV правилом

$y' = (x^3 - 2)'(x^2 + x + 1) + (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)' = 3x^2(x^2 + x + 1) + (x^3 - 2)(2x + 1) = 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 2x^4 - 4x + x^3 - 2 = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$

Ответ: $y' = 6x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$

Пример 2. Найти производную функции: $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2}$

Решение: Воспользуемся V правилом $y' = \frac{(x^2-x+2)'x^2 - (x^2-x+2)(x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2-x+2)}{x^4} = \frac{2x^3 - x^2 - 2x^3 + 2x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x^2 - 4x}{x^4} = \frac{x-4}{x^3}$

Ответ: $y' = \frac{x-4}{x^3}$

Пример 3. Найти производную функции $y = (5x - 3)^3$

Решение: Здесь используем правило дифференцирования сложной функции $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$.

$y' = ((5x - 3)^3)' = 3(5x - 3)^2(5x - 3)' = 3 \cdot 5 \cdot (5x - 3)^2 = 15(5x - 3)^2$

Ответ: $y' = 15(5x - 3)^2$

Пример 4. Вычислить интеграл $\int (5x^4 + 3x)dx$

Решение: $\int (5x^4 + 3x)dx = 5\int x^4 dx + 3\int x dx = x^5 + \frac{3}{2}x^2 + C$

Ответ: $\int (5x^4 + 3x)dx = x^5 + \frac{3}{2}x^2 + C$

Пример 5. Вычислить интеграл $\int (5x + 3)^2 dx$

Решение: $\int(5x+3)^2dx = \left|\begin{matrix} t=5x+3 \\ dt=5dx \\ dx=\frac{dt}{5}\end{matrix}\right| = \frac{1}{5}\int t^2dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{t^3}{3}+C = \frac{t^3}{15}+C = \frac{1}{15}(5x+3)^3+C$

Ответ: $\int(5x+3)^2dx = \frac{1}{15}(5x+3)^3+C$

Пример 6. Найти неопределенный интеграл $\int(2x+3)^4dx$**.**

Решение: $\int(2x+3)^4dx = \left|\begin{matrix} z=2x+3, \\ dz=2dx \\ dx=\frac{1}{2}dz\end{matrix}\right| = \frac{1}{2}\int z^4dz = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^5}{5}+C = \frac{1}{10}\cdot(2x+3)^5+C.$

Ответ: $\int(2x+3)^4dx = \frac{1}{10}\cdot(2x+3)^5+C.$

Пример 7. Найти неопределенный интеграл $\int\sqrt{1+x^3}x^2dx.$

Решение: $\int\sqrt{1+x^3}x^2dx = \left|\begin{matrix} 1+x^3=z \\ x^2dx=\frac{1}{3}dz\end{matrix}\right| = \frac{1}{3}\int\sqrt{z}dz = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}+C = \frac{2}{9}z^{3/2}+C = \frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+C = \frac{2}{9}(1+x^3)(1+x^3)^{1/2}+C = \frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}+C.$

Ответ: $\int\sqrt{1+x^3}x^2dx = \frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}+C.$

Пример 8. Найти интеграл $\int xcosxdx.$

Решение: Интеграл содержит произведение двух функций x и $cosx$. Способ подстановки не дает возможности найти этот интеграл. Обозначим $x=\mathcal{U}$, $cosxdx=d\mathcal{V}$; тогда $dx=d\mathcal{U}$; $\mathcal{V}=sinx$. Применим формулу интегрирования по частям: $\int xcosxdx = xsinx-\int sinxdx = xsinx+cosx+C.$

Ответ: $\int xcosxdx = xsinx+cosx+C.$

Пример 9. Найти интеграл $\int xe^xdx$

Решение: $\int xe^xdx = \left|\begin{matrix}\mathcal{U}=x, d\mathcal{V}=e^xdx; \\ d\mathcal{U}=dx, \mathcal{V}=e^x\end{matrix}\right| = xe^x-\int e^xdx = xe^x-e^x+C.$

Ответ: $\int xe^xdx = xe^x-e^x+C.$

Пример 10. Найти интеграл $\int(4x^3+6x-7)\ln xdx$

Решение: $\int(4x^3+6x-7)\ln xdx = \left|\begin{matrix}\mathcal{U}=\ln x, d\mathcal{V}=(4x^3+6x-7)dx; \\ d\mathcal{U}=\frac{dx}{x}, \mathcal{V}=(x^4+3x^2-7x);\end{matrix}\right| = \ln x(x^4+3x^2-7x)-\int(x^4+3x^2-7x)\frac{dx}{x} = \ln x(x^4+3x^2-7x)-\int(x^3+3x-7)dx = \ln x(x^4+3x^2-7x)-\left(\frac{x^4}{4}+3\frac{x^2}{2}-7x\right)+C = \ln x(x^4+3x^2-7x)-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-7x\right)+C.$

Ответ: $\int(4x^3+6x-7)\ln xdx = \ln x(x^4+3x^2-7x)-\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2-7x\right)+C.$

Пример 11. Решить дифференциальное уравнение первого порядка $ydy-xydx=0$

Решение: Данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные $ydy=xydx \rightarrow \frac{ydy}{y} = xdx \rightarrow\ dy=xdx$

Проинтегрируем левую и правую части последнего равенства

$$\int dy = \int xdx \rightarrow y = \frac{x^2}{2}+C$$

Ответ. $y=\frac{x^2}{2}+C$

Пример 12. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y$

Решение: В первую очередь перепишем производную $y' = \frac{dy}{dx}$.

Итак: $x\frac{dy}{dx} = y$. Данное дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Переменные разделены. В левой части – только «игреки», в правой части – только «иксы».

Проинтегрируем левую и правую части $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$

Разумеется, интегралы нужно взять. В данном случае они табличные: $ln|y| = ln|x| + C \to\ ln|y| = ln|x| + ln|C|$

Используем свойство логарифмов $lna + lnb = \ln(ab)$. В данном случае: $ln|y| = ln|Cx|$

Теперь логарифмы и модули можно убрать: $y = Cx$

Функция представлена в явном виде. Это и есть общее решение.

Ответ: $y = Cx$.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется производной функции, как обозначаются производные?
2. Сформулируйте физический и геометрический смыслы производной функции.
3. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
4. Формулы производных постоянной, суммы, произведения, частного.
5. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
6. Что называется дифференциалом функции? Сформулируйте геометрический смысл дифференциала.
7. Как связаны между собой дифференциал и производная функции? В чем различие между ними?
8. Сформулируйте свойства (арифметические операции) дифференциала.
9. Какие уравнения называют дифференциальными уравнениями?

Раздел 2. Комплексные числа

Тема 2.1. Комплексные числа и их представление

При изучении данной темы необходимо усвоить арифметические действия с комплексными числами. Решение квадратных уравнений.

Тригонометрическая форма комплексного числа. Показательная форма комплексного числа.

Определение: Числом вида $a + bi$, где a и b- действительные числа, i- мнимая единица, будем называть комплексным.

Степени мнимой единицы: если показатель степени числа i делится на 4, то значение степени получается 1; если при делении показатель степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i; если при делении показатель степени на 4 в остатке получается 2, то значение степени равно -1; если при делении показатель степени на 4 в остатке получается 3, то значение степени равно -i;

Действия над комплексными числами:

1. Сложение

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. Вычитание

$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

3. Умножение

$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(dc+ad)i$

4. Деление

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Алгебраическая форма

Запись комплексного числа z в виде $x+yi$, где x и y∈R, называется алгебраической формой комплексного числа.

Сумма и произведение комплексных чисел могут быть вычислены непосредственным суммированием и перемножением таких выражений, как обычно раскрывая скобки и приводя подобные, чтобы представить результат тоже в стандартной форме (при этом надо учесть, что $i^2=-1$):

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=ac+bci+adi-bd=$

$=(ac-bd)+(dc+ad)i$

Тригонометрическая форма

Если вещественную x и мнимую y части комплексного числа выразить через модуль $r=|z|$ и аргумент φ ($x=rcos\varphi, y=rsin\varphi$), то всякое комплексное число z, кроме нуля, можно записать в *тригонометрической форме* φ $z=r(cos\varphi+isin\varphi)$.

Показательная форма

Применяя формулу Эйлера $cos\varphi+isin\varphi=e^{i\varphi}$ к тригонометрической форме, получим показательную форму комплексного числа: $z=re^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi}$— расширение экспоненты для случая комплексного показателя степени.

Пример решения типового варианта

Пример 1. Вычислите $(i^{37}+i^{18})\cdot i^{45}$

Решение: $(i^{37}+i^{18})\cdot i^{45}=(i-1)i=i^2-i=-1-i$

Ответ: $(i^{37}+i^{18})\cdot i^{45}=-1-i$

Пример 2. Даны комплексные числа $z_1=2+3i,\ z_2=5-7i.$ Найти: а) z_1+z_2, б) z_1-z_2 в) z_1*z_2, г) z_1/z_2

Решение: а) $z_1+z_2=2+3i+5-7i=7-4i$

б) $z_1-z_2=(2+3i)-(5-7i)=2+3i-5+7i=-3+10i$

в) $z_1*z_2=(2+3i)(5-7i)=10+15i-14i-21i^2=10+i-21\cdot(-1)=31+i$

г) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}=\frac{10+15i+14i+21i^2}{5^2-(7i)^2}=\frac{-11+29i}{74}=-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i$

Ответ: а) $z_1+z_2=7-4i$

б) $z_1-z_2=-3+10i$

в) $z_1*z_2=31+i$

г) $\frac{z_1}{z_2}=-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i$

Пример 3. Комплексное число $z=-i$ представить в тригонометрической и в показательной форме.

Решение: Для заданного числа действительная часть a=0, а мнимая часть b=-1. Тогда модуль этого числа $|z|=\sqrt{0^2+(-1)^2}=\sqrt{0+1}=1$, а аргумент $\varphi=arctg\frac{-1}{0}=-\frac{\pi}{2}==$

$\frac{3\pi}{2}$. Отсюда получаем, что $z = 1 \cdot \left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}\right) = cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}$ -тригонометрическая форма комплексного числа

$z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$- показательная форма комплексного числа.

Ответ: $z = cos\frac{3\pi}{2} + isin\frac{3\pi}{2}$ -тригонометрическая форма комплексного числа

$z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$- показательная форма комплексного числа.

Вопросы для самоконтроля

1. Комплексные числа. Определение. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.
2. Геометрическая интерпретация, модуль, аргумент.
3. Операции над комплексными числами: сложение, умножение, возведение в степень, извлечение корня.

Раздел 3 Теория вероятностей и математическая статистика
Тема 3.1 Теория вероятностей

ПЕРЕСТАНОВКИ - различные комбинации из n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения этих элементов

Количество перестановок из n элементов вычисляется по формуле $\mathbf{P_n=n!}$, 0!=1, 1!=1

СОЧЕТАНИЯ - различные комбинации по k элементов, взятые из n элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом.

Количество сочетаний вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

РАЗМЕЩЕНИЯ - различные комбинации по k элементов, взятые из n элементов, отличающиеся друг от друга как элементами, так и порядком их расположения.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ПРАВИЛО СУММЫ

Если некоторый объект X может быть выбран из сово-купности объектов n способами, а объект Y может быть выбран из этой же совокупности k способами, то либо X либо Y могут быть выбраны n+k способами.

ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Если некоторый объект X может быть выбран из совокупности объектов n способами, а объект Y может быть выбран из этой же совокупности k способами, то и X, и Y могут быть выбраны n•k способами.

Задача 1. У Вас радость! Вы получили квартиру, да еще кухонный гарнитур из пяти предметов! Все они - два шкафа, тумба - могут уместиться вдоль одной стены. Сколькими способами вы можете меблировать кухню, устанавливая вдоль стены свой гарнитур?

Решение: так, как Вы, переставляя мебель, строите комбинацию сразу из всех элементов, то должны использовать формулу для вычисления количества перестановок из пяти элементов, то есть:

P_5=5!=1•2•3•4•5=120.

Или можно считать число размещений из пяти элементов по пять, т.к. порядок элементов здесь важен.

$$A_5^5 = \frac{5!}{0!} = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120\cdot$$

Таким образом, $\mathbf{P_n} = \mathbf{A_n^n}$

Задача 2. Сколько трехбуквенных слов можно составить из шифра, содержащего десять знаков?
Решение. Очевидно, что "слова" $% & и $&% разные, хотя и имеют одинаковый набор "букв". Следовательно, для решения задачи нужно найти количество размещений из десяти знаков шифра по три.

$$A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$$

Задача 3. Для запуска программы на компьютере необходимо набрать пароль: 3 любых клавиши из семи зарезервированных. Сколькими способами можно запустить программу?
Решение. По условию можно нажимать три клавиши в произвольном порядке. Следовательно, для решения задачи необходимо найти количество сочетаний из семи по три: $C_7^3 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$

Задача 5. Сколько существует пятизначных чисел с разными цифрами, составленных из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, у которых три первые цифры четные, а остальные нечетные ?
Решение: Среди названных цифр 4 четных и 5 нечетных. Вариантов для двух последних цифр в числе может быть столько, сколько существует размещений из пяти (нечетных) по два. А для трех первых столько, сколько существует размещений из четырех по три. Но так как для рассматриваемых чисел одновременно нужны и три четных, и две нечетных цифры, то всего количество таких чисел будет находится как произведение размещений:

$$A_4^3 \cdot A_5^2 = 4!\cdot 4\cdot 5 = 480$$

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

1) Совокупность условий — опыт=испытание
2) Результат опыта — элементарный исход=событие (А)
3) Если в результате опыта событие.

Обязательно произойдет → Достоверное Ω

Не может произойти → Невозможное Ø

Может произойти или не произойти → Случайное (A;B;C)

4) Возможность появления любого исхода одинакова => все исходы равновозможные.

Если в результате испытания обязательно произойдет одно или несколько событий => эти события образуют **ПОЛНУЮ ГРУППУ.**

«Вода закипает при 100º» — достоверное событие.
«Лед плавится при 20º» — невозможное событие.
«Завтра будет дождь» — случайное событие.
Подбрасываем кубик. Событие: «Выпала 1», «Выпала 2»,…, «Выпала 6» образуют полную группу.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

N — число всех равновозможных элементарных исходов, образующих полную группу.
K — число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию А.

$\boxed{P(A)=\frac{k}{n}}$ **ФОРМУЛА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ**

СВОЙСТВО:

1) $0 \le P(A) \le 1$
2) ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ РАВНА 0.
$P(\varnothing)=0$
3) Вероятность достоверного события равна 1.
$P(\Omega)=1$

Задача 1. Из десяти билетов лотереи выигрышными являются три. Найти вероятность того, что из пяти взятых наудачу билетов, два окажутся выигрышными.

*Решение***:** Событие А - из пяти наудачу взятых билетов два выигрышных. Число всех возможных исходов равно числу всех возможных комбинаций по пять билетов. Порядок в этих комбинациях неважен и их количество равно числу сочетанийиз 10 по 5.Число исходов, благоприятствующих данному событию А, состоит из колличества комбинаций из выигрышных билетов по 2 в сочетании с комбинациями из невыигрышных билетов по 3. Таким образом, число всех возможных исходов:

$$n = C_{10}^{5},$$

а число исходов, благоприятствующих данному событию,

$$k = C_3^2 \cdot C_7^3,$$

тогда вероятность события равна

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{5}{12}.$$

Задача 2. 10 вариантов контрольной работы тщательно перемешаны и распределены между 8 студентами, сидящими в одном ряду. Найти вероятность того, что выданными окажутся первые восемь вариантов.

*Решение***:** Событие А «Выданными окажутся первые восемь вариантов». Число всех возможных исходов равно числу размещений из десяти по восемь. Число исходов, благоприятствующих событию А, равно числу перестановок из восьми. Вероятность события А.

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{P}_8}{\mathrm{A}_{10}^8} = \frac{8!2!}{10!} = \frac{2}{9 \cdot 10} = \frac{1}{45}.$$

Задача 3. В корзине находится восемь белых и 5 черных шаров. Наудачу вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что не менее двух из них белые.

Решение: Число всех возможных исходов равно числу сочетаний из 13 (общее количество шаров) по 3.

А число исходов, благоприятствующих исследуемому событию, складывается из числа комбинаций, в которых 2 белых шара и из числа комбинаций, в которых 3 белых шара: ведь событие состоит в том, что либо 2, либо 3 белых шара должны быть среди вынутых наудачу. Тогда вероятность события:

$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_5^1 + C_8^3}{C_{13}^3} = \frac{98}{143}.$$

ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИКЕ

Требования к оформлению

В соответствии с учебным планом студенты-заочники выполняют контрольную работу по курсу высшей математики.

Контрольная работа должна удовлетворять следующим требованиям:

1) Работу рекомендуется выполнять в ученической тетради в клеточку, авторучкой с синей или черной пастой. Цветную пасту можно употреблять для рисунков, графиков и т.п.

2) Нужно оставить свободное место за полями. Если в тетради нет черты, ограничивающей поле, ее следует провести.

3) Обязательно записать полностью условия всех решаемых задач – по тексту методического пособия.

4) Задачи (и их решения) следует располагать в том порядке, в каком они даны в методическом пособии.

5) Записи вести аккуратно, разборчивым почерком. Зачеркивания, помарки, обширные исправления не допускаются. Графики рисовать аккуратно, с указанием (и соблюдением) масштаба. **Черновики не приносить!**

6) Решения должны сопровождаться краткими, но вразумительными объяснениями, в необходимых случаях должны быть ссылки на учебник. Например, “составляем уравнение прямой, проходящей через две точки…”, “По определению непрерывности функции в точке…” и т.п.

7) Объяснения должны относиться строго к тексту задачи. Формулы сокращенного умножения, решение квадратных уравнений и теорему Пифагора объяснять **не нужно**.

8) При работе над ошибками – читать замечания и указания проверяющего и, по возможности, выполнять их в работе, отправленной на повторную проверку – **вместе с предыдущей** работой!

9) При несоблюдении требований 1-9 работа может быть возвращена без проверки для повторного выполнения.

Образец оформления титульного листа контрольной работы дан на сайте. Выбор вариантов контрольной работы определяется по порядковому номеру списка группы.

Критерии оценивания контрольной работы

Отметка «3» (удовлетворительно) ставится за любые 8-11 верно выполненных примеров.
Отметка «4» (хорошо) ставится при верном выполнении любых 12-15 примеров.
Отметка «5» (отлично) ставится за все 16 верно выполненных примеров.

Работа, выполненная не по своему варианту, не засчитывается и возвращается студенту без проверки. Студенты, не выполнившие контрольную работу или не получившие зачета по ней, к экзамену не допускаются.

Внимание! Работу необходимо сдать за три недели до выхода на сессию.

Задание 1

Найти пределы функций:

1. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; *г)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos4x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

2. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin5x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3xtgx}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xtgx}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-3}\right)^{1-2x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 3x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}x^2 ctg^2 3x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

11. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$; *б)* $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; *г)* $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos6x}{1-\cos4x}$; *д)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+5}\right)^{x-1}$.

12. *а)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$; *б)* $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin5x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$.

13. . а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^2+4x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$.

14. . а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3xtgx}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x-4}{3+x-4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xtgx}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+1}{3x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x+8}{2x^2+5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-7}{2x-3}\right)^{4x+1}$.

18. . а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^2+x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 3x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+3}\right)^{3-2x}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 ctg^2 3x$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$.

Задание 2

Найти производную функции:

1. а) $y=\frac{x^4}{4}-3x^2+6x-2$; б) $y=\sin x\cdot\cos x$; в) $y=\sin^3\frac{3x}{4}$

2. а) $y=\frac{2x^5}{3}-\frac{3}{x}+x$; б) $y=(x^2+x)\ln x$; в) $y=\frac{e^{2x}-e^{-3x}}{\sqrt{x}+1}$

3. а) $y=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3}$; б) $y=tgx\cdot e^x$; в) $y=\frac{tg\sqrt{2x+5}}{\ln(3x^2)}$

4. а) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$; б) $y=ctgx\cdot\cos x$; в) $y=\frac{\ln\sqrt{2x+1}}{\sin(3x)}$

5. а) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt[3]{x}-23$; б) $y=\sin x\cdot\left(\frac{x}{2}+\sqrt{x}\right)$; в) $y=\frac{\sin(2x-1)}{\cos x+1}$

6. а) $y=\left(x+\sqrt{x}\right)^2$; б) $y=\frac{x-1}{x+1}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{(\ln 2x-tg3x)^4}}$

7. а) $y=\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)^2$; б) $y=\frac{x^2-2x}{\sin x}$; в) $y=(tg4x+3)^3$

8. а) $y=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$; б) $y=\frac{\cos x}{x+2}$; в) $y=\sin(3x)\cdot e^{4x^2-3x}$

9. а) $y=\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $y=\frac{tgx}{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{1}{(1+\cos 4x)^7}$

10. а) $y=2tgx-3\cos x$; б) $y=\frac{tgx+\cos x}{x^3-2x}$; в) $y=\ln(x^4+3x-2)$

11. а) $y=7\sin x+5e^x$; б) $y=\frac{e^x-3x^4}{\cos x}$; в) $y=\sin 3x\cdot\cos 5x$

12. а) $y=\sqrt{x}+ctgx$; б) $y=\frac{tgx+\cos x}{\sqrt{x}}$; в) $y=\ln(\cos(3x^2-2x))$

13. а) $y=\ln x+2\sqrt[5]{x^3}$; б) $y=(x+1)^2e^x$; в) $y=(\sin 4x+1)^5$

14. а) $y=e^x-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$; б) $y=\frac{\sin x-4x}{ctgx}$; в) $y=\sqrt{(x^2-3x+2)}$

15. а) $y=1-\frac{\cos x}{4}$; б) $y=\frac{(x-1)^2}{\ln x}$; в) $y=\sqrt[3]{\sin 3x}$

16. а) $y=2\sin x-6tgx$; б) $y=\sqrt[3]{x^4}\sin x$; в) $y=\frac{\sin 5x}{\cos 4x}$

17. а) $y=\frac{e^x}{\sqrt{5}}-\frac{\ln x}{\sqrt{3}}$; б) $y=\frac{\ln x-3x}{tgx}$; в) $y=ctg^3(x-2x^2)$

18. а) $y=x^4+ctgx$; б) $y=\frac{e^x-2\sin x}{x-\cos x}$; в) $y=\left(tg3x+\cos 2x\right)^2$

19. а) $y=e^x-\frac{1}{2x}+\frac{1}{3}\ln x$; б) $y=\frac{x^2+3x-1}{x^2-1}$; в) $y=\cos^2 5x$

.

Задание 3

Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3;\ [-1;4].$

2. $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 5;\ [0;6].$

3. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2;\ [-3;4].$

.4. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6;\ [-2;3].$

5. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 10;\ [-4;2].$

6. $y = \sqrt{x} - x + 5;\ [0;4].$

7. $3\sqrt[3]{x} - x - 4;\ [-1;8].$

8. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x + 1;\ [-1;27].$

9. $y = \sqrt[3]{(x+1)} - x - 2;\ [-2;7].$

10. $y = 4\sqrt{x+1} - 2x + 1;\ [-1;3].$

11. $y = 7x^3 + 9x^2 - 3x + 6$; [-1;1].

12. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 6;\ [-2;3].$

13. $y = \sqrt{x} - x + 5;\ [0;4].$

14. $y = 6{,}75x^4 - x + 2$; [0;2].

15. $y = -x^3 + 3x + 2$; [1;3].

16. $y = \sqrt[3]{(x+1)} - x - 2;\ [-2;7].$

17. $3\sqrt[3]{x} - x - 4;\ [-1;8].$

18. $y = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 2;\ [-3;4].$

19. $y = 4\sqrt{x+1} - 2x + 1;\ [-1;3].$

Задание 4

Провести полное исследование функции $y = f(x)$ и построить ее график:

1. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

2. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$.

3. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

4. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

5. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

6. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

7. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$.

8. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$.

9. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$.

10. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 4}{x + 5}$.

11. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$.

12. $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x + 1}$.

13. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$.

14. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 7}{x - 3}$.

15. $y = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x}$.

16. $y = \dfrac{x^2 - 6x + 10}{x - 3}$.

17. $y = \dfrac{x^2 + 2x + 8}{x + 4}$.

18. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{x - 4}$.

19. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 6}{x - 5}$.

Задача 5

Найти интеграл:

1. $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$
2. $\int\frac{x-2}{x^3}dx$
3. $\int\left(12\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}\right)dx$
4. $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx$
5. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
6. $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}\right)dx$
7. $\int\frac{x^2-3x-6}{\sqrt{x}}dx$
8. $\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$
9. $\int\frac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$
10. $\int\frac{dx}{x^2-25}$
11. $\int\frac{3dx}{9-x^2}$
12. $\int\frac{dx}{7+x^2}$
13. $\int\frac{7dx}{\sqrt{2-x^2}}$
14. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}+\frac{2}{\sqrt{x^2+3}}\right)dx$
15. $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{10}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
16. $\int\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{4}{x\sqrt{x}}\right)dx$
17. $\int\left(2^{\frac{x}{2}}-3^{-\frac{x}{3}}\right)dx$
18. $\int\left(4\sin x+8x^3-\frac{11}{\cos^2 x}\right)dx$
19. $\int\frac{4-\sin^3 x}{\sin^2 x}dx$

Задача 6

Вычислить интегралы по частям:

1. $\int x\sin x dx$
2. $\int x\cos 2x dx$
3. $\int xe^{3x}dx$
4. $\int(x-4)\sin 2x dx$
5. $\int xe^{-x}dx$
6. $\int x\sin\frac{x}{2}dx$
7. $\int x\cos(3x-1)dx$
8. $\int x^2\sin 5x dx$
9. $\int x^2e^{-2x}dx$
10. $\int\ln x dx$
11. $\int x\ln(x-1)dx$
12. $\int(x+3)\sin x dx$
13. $\int(x-2)\cos x dx$
14. $\int(x-5)e^{2x}dx$
15. $\int x^2\sin(2-5x)dx$
16. $\int x^2\cos(4x+1)dx$
17. $\int\ln(x^2+1)dx$

18. $\int x^2 \ln(1+x)dx$

19. $\int x^2 \sin\frac{x}{2}dx$

Задача 7

Вычислить интеграл:

1. $\int_0^1 (3x^2-2x+1)dx$

2. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-1)dx$

3. $\int_1^9 3(\sqrt{x}-x)dx$

4. $\int_1^2 \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

5. $\int_4^9 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})dx$

6. $\int_1^2 (\sqrt{x}-\sqrt[3]{x})dx$

7. $\int_0^3 (1+e^x)dx$

8. $\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

9. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$

10. $\int_1^8 \left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

11. $\int_0^4 (1+\sqrt{x})^2 dx$

12. $\int_0^{\pi} (\sin x+3)dx$

13. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dx}{\cos^2 2x}$

14. $\int_0^1 \frac{dx}{4x+1}$

15. $\int_0^1 \sqrt{1+x}dx$

16. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$

17. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$

19. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Задача 8

Вариант 1

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым стрелком равна 0.8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) только один стрелок поразит мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень.
2. Из 10 изделий 3 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 2 высшего качества.
3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность остановки в течение смены у первого станка равна 0,4, у второго станка -- 0,45, у третьего –0,3, у четвертого – 0,34. Найти вероятность бесперебойной работы в течение смены всех четырех станков.

Вариант 2

1. В группе из 20 студентов на контрольной работе получили:
4 студента – отлично, 6 студентов – хорошо, 5 студентов – удовлетворительно. Какова вероятность, что из пяти наудачу выбранных студента а) 3 студента имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе; б) хотя бы один имеет неудовлетворительную оценку; в) все имеют неудовлетворительные оценки ?
2. Вероятность того, что из имеющихся пяти лотерейных билетов хотя бы один выиграет, равна 0.40951. Найти вероятность выигрыша по одному лотерейному билету.
3. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны 0,8, 0,4, 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно, чтобы пришли двое.

Вариант 3

1. Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.
2. Вероятность появления хотя бы одного события при трех независимых испытаниях равна 0,973. Какова вероятность появления этого события при одном испытании?
3. Студент ищет нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике – 0,6, во втором –0,7, в третьем –0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится а) только в двух справочниках; б) только в одном; в) хотя бы в одном.

Вариант 4

1. На пяти карточках написано по одной букве: М,О,Р,Т,Ш,Ы. Берем наугад карточки и выкладываем их по порядку. Найти вероятность того, что получится слово “шторы” ?
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения для первого 0,6 для второго—0,8. Найти вероятность поражения мишени при одном залпе.
3. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наугад взял 3 детали. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна из них окрашена; две из них окрашены; в все не окрашены.

Вариант 5

1. В урне 30 шаров, 25 из них цветные, остальные – черные. Найти вероятность того, что 3 наудачу вынутых шара будут черными.

2. Из 13 изделий 7 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 4 высшего качества.
3. В атвобусе едет 5 пассажиров. Вероятность выйти на следующей остановке для каждого из них равна 0,2. Найти вероятность того, что на следующей остановке выйдет хотя бы один пассажир.

Вариант 6

1. Партия из 10 деталей содержит 2 детали 1 сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей хотя бы одна деталь первого сорта.
2. В первой урне 10 белых и 5 красных шаров. Во второй – 5 белых и 7 красных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара белые.
3. Трое учеников решают задачу. Вероятность допустить ошибку в решении для перового ученика равна 0,4, для второго –0,2, для третьего --0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один ученик решит задачу правильно.

Вариант 7

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым стрелком равна 0.7. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка не поразят мишень; б) только один стрелок поразит мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень.
2. Из 10 изделий 6 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 5 высшего качества.
3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность остановки в течение смены у первого станка равна 0,3, у второго станка -- 0,45, у третьего –0,35, у четвертого – 0,32. Найти вероятность бесперебойной работы в течение смены всех четырех станков.

Вариант 8

1.В группе из 22 студентов на контрольной работе получили:
5 студента – отлично, 7 студентов – хорошо, 3 студентов – удовлетворительно. Какова вероятность, что из пяти наудачу выбранных студента а) 3 студента имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе; б) хотя бы один имеет неудовлетворительную оценку; в) все имеют неудовлетворительные оценки ?
2. Вероятность того, что из имеющихся семи лотерейных билетов хотя бы один выиграет, равна 0.40951. Найти вероятность выигрыша по одному лотерейному билету.
3. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны 0,8, 0,4, 0,6. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно, чтобы пришли хотя бы двое.

Вариант 9

1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете, если в билете три вопроса?.
2. Вероятность появления хотя бы одного события при четырех независимых испытаниях равна 0,973. Какова вероятность появления этого события при одном испытании?
3. Студент ищет нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике – 0,6, во втором –0,7, в третьем –0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится а) только в двух справочниках; б) только в одном; в) хотя бы в одном.

Вариант 10

1. На пяти карточках написано по одной букве: Ь, Е, А, М, К, Н. Берем наугад карточки и выкладываем их по порядку. Найти вероятность того, что получится слово “камень” ?
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения для первого 0,9, для второго—0,8. Найти вероятность поражения мишени при одном залпе.
3. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наугад взял 5 деталей. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна из них окрашена; б) две из них окрашены; в) все не окрашены.

Вариант 11

1. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым стрелком равна 0.8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят мишень; б) только один стрелок поразит мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень.
2. Из 10 изделий 3 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 2 высшего качества.
3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность остановки в течение смены у первого станка равна 0,4, у второго станка -- 0,45, у третьего –0,3, у четвертого – 0,34. Найти вероятность бесперебойной работы в течение смены всех четырех станков.

Вариант 12

1. В группе из 20 студентов на контрольной работе получили:

4 студента – отлично, 6 студентов – хорошо, 5 студентов – удовлетворительно. Какова вероятность, что из пяти наудачу выбранных студента а) 3 студента имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе; б) хотя бы один имеет неудовлетворительную оценку; в) все имеют неудовлетворительные оценки ?

2. Вероятность того, что из имеющихся пяти лотерейных билетов хотя бы один выиграет, равна 0.40951. Найти вероятность выигрыша по одному лотерейному билету.
3. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны 0,8, 0,4, 0,7. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно, чтобы пришли двое.

Вариант 13

1. Студент знает 50 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете.
2. Вероятность появления хотя бы одного события при трех независимых испытаниях равна 0,973. Какова вероятность появления этого события при одном испытании?
3. Студент ищет нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике – 0,6, во втором –0,7, в третьем –0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится а) только в двух справочниках; б) только в одном; в) хотя бы в одном.

Вариант 14

1. На пяти карточках написано по одной букве: М,О,Р,Т,Ш,Ы. Берем наугад карточки и выкладываем их по порядку. Найти вероятность того, что получится слово “шторы” ?
2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность поражения для первого 0,6 для второго—0,8. Найти вероятность поражения мишени при одном залпе.
3. В ящике содержится 10 деталей, из которых 4 окрашены. Сборщик наугад взял 3 детали. Найти вероятность того, что: а) хотя бы одна из них окрашена; две из них окрашены; в все не окрашены.

Вариант 15

1. В урне 30 шаров, 25 из них цветные, остальные – черные. Найти вероятность того, что 3 наудачу вынутых шара будут черными.

2. Из 13 изделий 7 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 4 высшего качества.
3. В атвобусе едет 5 пассажиров. Вероятность выйти на следующей остановке для каждого из них равна 0,2. Найти вероятность того, что на следующей остановке выйдет хотя бы один пассажир.

Вариант 16
1. Партия из 10 деталей содержит 2 детали 1 сорта. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 5 деталей хотя бы одна деталь первого сорта.
2. В первой урне 10 белых и 5 красных шаров. Во второй – 5 белых и 7 красных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара белые.
3. Трое учеников решают задачу. Вероятность допустить ошибку в решении для перового ученика равна 0,4, для второго –0,2, для третьего --0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один ученик решит задачу правильно.

Вариант 17
1. Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения мишени каждым стрелком равна 0.7. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка не поразят мишень; б) только один стрелок поразит мишень; в) хотя бы один стрелок поразит мишень.
2. Из 10 изделий 6 имеют высшую оценку ОТК. Найти вероятность того, что среди взятых наудачу 6 изделий 5 высшего качества.
3. Рабочий обслуживает 4 станка. Вероятность остановки в течение смены у первого станка равна 0,3, у второго станка -- 0,45, у третьего –0,35, у четвертого – 0,32. Найти вероятность бесперебойной работы в течение смены всех четырех станков.

Вариант 18
1.В группе из 22 студентов на контрольной работе получили:
5 студента – отлично, 7 студентов – хорошо, 3 студентов – удовлетворительно. Какова вероятность, что из пяти наудачу выбранных студента а) 3 студента имеют неудовлетворительные оценки по контрольной работе; б) хотя бы один имеет неудовлетворительную оценку; в) все имеют неудовлетворительные оценки ?
2. Вероятность того, что из имеющихся семи лотерейных билетов хотя бы один выиграет, равна 0.40951. Найти вероятность выигрыша по одному лотерейному билету.
3. Вероятности того, что каждый из трех друзей придет в условленное место, соответственно равны 0,8, 0,4, 0,6. Определить вероятность того, что встреча состоится, если для этого достаточно, чтобы пришли хотя бы двое.

Вариант 19
1. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает два вопроса, содержащиеся в его экзаменационном билете, если в билете три вопроса?.
2. Вероятность появления хотя бы одного события при четырех независимых испытаниях равна 0,973. Какова вероятность появления этого события при одном испытании?
3. Студент ищет нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятность того, что эта формула содержится в первом справочнике – 0,6, во втором –0,7, в третьем –0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится а) только в двух справочниках; б) только в одном; в) хотя бы в одном.

Экзаменационные вопросы:

1. Что называется матрицей? Виды матриц. Действия над матрицами.
2. Что называется определителем матрицы? Его виды и свойства. Способы вычисления определителей.
3. Какая матрица называется обратной к данным? Как найти обратную матрицу?
4. Расскажите о решении систем линейных уравнений матричным методом.
5. Сформулируйте определение предела последовательности и предела функции. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
6. Расскажите о правилах раскрытия неопределенностей $\left(\frac{0}{0}\right); \left(\frac{\infty}{\infty}\right); 1^{\infty}$.
7. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми. Неопределенные выражения.
8. Сформулируйте первый и второй замечательные пределы. Запишите таблицу эквивалентностей.
9. Дайте определение вектора? Координаты вектора, модуль вектора. Линейные операции над векторами.
10. Как найти скалярное, векторное и смешенное произведение векторов.
11. Дайте определение прямой на плоскости. Виды уравнений. Формулы для нахождения расстояния от точки до прямой.
12. Расскажите о линиях второго порядка: окружности, эллипсе, гиперболе и параболе.
13. Дайте определение производной функции? Механический и геометрический смысл.
14. Сформулируйте правила дифференцирования? Запишите формулы производных элементарных функций.
15. Сформулируйте необходимые и достаточные признаки экстремума функции?
16. Исследование функции при помощи производных. Возрастание и убывание функции.
17. Исследование функции при помощи производных. Максимум и минимум функции.
18. Исследование функции при помощи производных. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Выпуклость графика функции.
19. Исследование функции при помощи производных. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции построения графика.
20. Какая функция называется первообразной для данной функции? Что называется неопределенным интегралом?
21. Назовите основные свойства неопределенного интеграла. Запишите основные формулы интегралов.
22. Расскажите об основных методах вычисления неопределенного интеграла? (Формула интегрирования по частям).
23. Определенный интеграл. Его геометрический и физический смысл. Формула Ньютона-Лейбница. Основные свойства.
24. Расскажите об основных методах вычисления определения определенного интеграла (формула Ньютона-Лейбница, интегрирование по частям).
25. Что называется дифференциальным уравнением? Что называется решением дифференциального уравнения? Как интегрируются уравнения с разделяющими переменными?
26. Как интегрируются однородные и линейные дифференциальные уравнения?

• ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Основные источники (для студентов)

1. Григорьев, В. П. Математика [Текст]: учебник для студ. учреждений сред. профобразования / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. — М. : Издательский центр «Академия», 2016. — 368 с.

Дополнительные источники (для студентов)

1. Спирина М. С Дискретная математика [Текст]: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин 11-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия 2015. — 368 с
2. Спирина М. С Теория вероятностей и математическая статистика [Текст]: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М. С. Спирина, П. А. Спирин. — 7-е изд., стер. — М. : Издательский центр «Академия», 2016. — 352 с
3. Петухова Е.Г.

Интернет-ресурсы

1. Лекция 1. Первообразная и неопределенный интеграл [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g
2. Лекция 6. Комплексные числа (часть 1) [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?v=dZPRzB1Nj08
3. Лекция 8. Основные сведения о рациональных функциях [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?v=1546Q24djU4&feature=channel
4. Геометрический смысл производной [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo
5. Математика для заочников и не только [Электронный ресурс] — Режим доступа: http://mathprofi.ru/index.html

Петухова Елена Геннадьевна

Преподаватель математики

Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение Иркутской области «Братский промышленный техникум»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ПО ДИСЦИПЛИНЕ

МАТЕМАТИКА

основной профессиональной образовательной программы
по специальности СПО
23.02.04 Техническая эксплуатация подъемно-транспортных, строительных, дорожных машин и оборудования (по отраслям)
для студентов заочной формы обучения